Практическое занятие
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2 \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ - произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел $(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Например, система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ несовместная, а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ - совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений $\left(x_1 = c,\ x_2 = 10 - 2c, \text{ где } \ c - \text{любое число}\right)$

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где *A* – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, *X* – матрица-столбец переменных; *B* – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + ... + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B. \qquad (2)$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X = A^{-1}B \qquad (3)$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, ..., n). \qquad (4)$$

Формулы (4) получили название формул Крамера.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

При решении методом Гаусса можно:

- переставлять местами два любых уравнения системы;
- умножать обе части уравнения на произвольное, отличное от нуля число;
- прибавлять к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженного на какое-то постоянное число.

Система обычно решается с помощью преобразований расширенной матрицы (матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов).

Если в результате преобразования матрицы:

1) получится строка 0 0 0 … 0 c b – система имеет ***единственное решение:***

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + ... + 0\cdot x_{n-1} + c\cdot x_n = b_i$$

2) появится строка, состоящая из нулей, т.е. 0 0 0 … 0 0 – система имеет ***множество решений:***

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + ... + 0\cdot x_n = 0$$

3) появится строка 0 0 0 … 0 b – система ***решений не имеет:***

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + ... + 0\cdot x_n = b$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Найдем определитель $|\mathrm{A}| = 5$. Так как $|\mathrm{A}| \neq 0$, матрица А – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \; X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1*3+3*11+(-2)*8 \\ 3*3+1*11+1*8 \\ 1*3+(-2)*11+3*8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta = |\mathrm{A}| = 5$. Так как $\Delta \neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь по формулам Крамера (4):

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \; \mathrm{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \; \mathrm{x}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Пример 2. Методом Гаусса решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$

$$\begin{matrix} (-1) & (-5) \\ \searrow & \searrow \\ & \searrow \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 18 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ (-2) \\ \searrow \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right)$$

$$0 \quad 0 \quad c \quad b$$

Запишем полученную систему треугольного вида

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ \qquad 17x_3 = 17 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 - 4 + 2 = 1 \\ 2x_2 - 8 \cdot 1 = 0 \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ 2x_2 = 8 \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \underline{x_1 = 3} \\ \underline{x_2 = 4} \\ \underline{x_3 = 1} \end{matrix}$$

$\text{Ответ}: (3,\ 4, 1)$

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13{,}5/8 = 27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6, \\ -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4}$ $= \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1;\ 2;\ -1;\ 2)$.

Пример 4. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для решения в аудитории

Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$